www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 18 avril 1989

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 8

N.B. : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est recommandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

Partie I :

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les axes Ox et Oy sont respectivement dirigés par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. L'unité d'angle est le radian. On note R le corps des réels.

1°) Soit a un réel strictement positif.

On donne la famille de droites $(D_\theta)_{\theta \in R}$, chacune des droites D_θ étant définie par son équation cartésienne :

$$D_\theta : x\cos\theta + y\sin\theta - a\sin\theta\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

a) Déterminez un réel T strictement positif, aussi petit que possible, tel que :

$$\forall \theta \in R,\ D_{\theta+T} = D_\theta \qquad (2)$$

b) Déterminez l'enveloppe de la famille de droites $(D_\theta)_{\theta \in R}$ quand le réel θ décrit R. On rappelle que les coordonnées du point caractéristique $M(\theta)$ de D_θ vérifient l'équation de D_θ ainsi que l'équation dérivée.

On détermine ainsi une représentation paramétrique de (C) :

$$M(\theta) : x = f(\theta),\ y = g(\theta) \qquad (3)$$

Etudiez et tracez la courbe (C) obtenue. Le tracé devra être effectué en prenant a=1, et en prenant pour unité 5 cm sur chaque axe.

N.B. : La détermination exacte des fonctions f et g est importante pour la suite du problème.

2°) a) Montrez que l'ensemble des isométries affines du plan laissant la courbe (C) globalement invariante est un groupe, pour la composition des applications.

b) Déterminez tous les éléments de ce groupe.

3°) a) Déterminez l'ensemble (D) des projections orthogonales de l'origine O sur les tangentes à la courbe (C).

Etudiez et tracez la courbe (D) obtenue (unité = 5 cm).

b) Déterminez une courbe (D_1) du plan telle que l'ensemble des projections orthogonales de l'origine O sur les tangentes à la courbe (D_1) soit la courbe (C).

Etudiez et tracez la courbe (D_1) (unité = 5 cm).

En particulier, déterminez des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection de la courbe (D_1) avec les axes.

4°) a) Déterminez une représentation paramétrique de la développée (D_2) de la courbe (C).

b) Montrez qu'il existe une transformation géométrique simple du plan qui transforme la courbe (C) en sa développée (D_2).

5°) Calculez la valeur de l'aire intérieure à la courbe (C), soit $\mathcal{A}(C)$.

Partie II :

Soit E l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les axes Ox, Oy, et Oz sont respectivement dirigés par les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$, et $\vec{k}$.

1°) Soit (Γ) une courbe de l'espace admettant une représentation paramétrique de la forme :

$$P(\theta) : x = f(\theta),\ y = g(\theta),\ z = h(\theta),\ \theta \in [0, \pi/2] \qquad (4)$$

où f et g sont les fonctions introduites au (I 1°) b)).

a) Déterminez la fonction h satisfaisant aux conditions suivantes :

- h est de classe C^1.
- Les tangentes à la courbe (Γ) font l'angle constant $\pi/4$ avec le vecteur $\vec{k}$. (5)
- h est croissante.
- h(0) = 0.

Dans toute la suite du problème, on suppose la fonction h ainsi définie.

TSVP

b) Etudiez et tracez les projections orthogonales de la courbe (Γ) sur les plans de coordonnées (xOz) et (yOz). (Il n'est pas demandé de le faire pour (xOy) car la courbe (C) a déjà été étudiée).

2°) a) Déterminez les coordonnées du centre de courbure I(θ) de la courbe (Γ) en P(θ). Le point I(θ) est défini par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{P(\theta)I(\theta)} = R(\theta)\,\overrightarrow{N(\theta)} \qquad (6)$$

où R(θ) est le rayon de courbure, et $\overrightarrow{N(\theta)}$ le vecteur normal principal à la courbe (Γ) en P(θ).

b) Soit (Γ') la courbe décrite par le point I(θ) défini ci-dessus. Montrez que pour tout réel θ appartenant à l'intervalle $[0,\pi/2]$, la tangente à (Γ) en P(θ) et la tangente à (Γ') en I(θ) sont orthogonales.

Partie III :

1°) Soit (S) la surface engendrée par rotation de la courbe (Γ) autour de l'axe Oz (La courbe (Γ) a été définie en II 1°) b)).

a) Déterminez une représentation paramétrique de la surface (S). On pourra utiliser une rotation d'angle ϕ autour de l'axe Oz.

b) Déterminez une équation cartésienne de la surface (S).
Précisez la nature de la surface (S).
Déterminez une équation cartésienne de la méridienne de la surface (S) située dans le plan (xOz).

c) Calculez la valeur de l'aire $\mathcal{A}$(S) de la surface (S), et donnez-en une valeur numérique approchée pour a=1.

2°) a) Montrez que la surface (S) peut être également être engendrée par rotation d'un segment de droite autour de l'axe Oz

b) Calculez l'angle d'un tel segment de droite avec l'axe Oz.

3°) Calculez le volume du solide limité par la surface (S), et les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :

$$P_1 : z = 0 \ ; \ P_2 : z = 3a/2 \qquad (7)$$

4°) On considère le point A(0,0,3a/4). Soit (Σ) l'ensemble des projections orthogonales du point A sur les plans tangents à la surface (S).

a) Montrez que (Σ) est une surface de révolution.

b) Déterminez une représentation paramétrique de la méridienne de (Σ) située dans le plan xOz (On ne demande pas d'étude ni de tracé).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail